

Feuille d'exercices 2

Dans cette feuille, étant donnés $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, on note $\int_a^b f(t)dt$ l'intégrale (de Riemann) de f entre a et b . Si $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ désigne une primitive de f (c'est-à-dire une fonction de dérivée $F' = f$), on rappelle qu'on a l'égalité $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$. Notamment, lorsque $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sont de classe C^1 , on a l'égalité $\int_a^b (u'v + uv')(t)dt = (uv)(b) - (uv)(a)$ (intégration par parties).

Exercice 1. (Propriétés de base des intégrales). Vrai ou faux (justifier en donnant une preuve ou un contre exemple) ? Si vous répondez faux essayez, lorsque c'est possible, de réparer l'énoncé pour qu'il devienne correct (en rajoutant une hypothèse par exemple).

1. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $\int_0^b f(t)dt \geq 0$ pour tout $b \in [0, 1]$ alors $f \geq 0$.
2. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Si la fonction $x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ est croissante, alors f est positive.
3. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f \leq 1$ alors $\int_0^1 f^2(t)dt \leq \int_0^1 |f(t)|dt$.
4. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive telle que $\int_0^1 f(t)dt = 0$, alors f est la fonction nulle.
5. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique de période $T > 0$. Alors pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a $\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$.

Exercice 2. (Révisions de méthodes de calcul d'intégrales).

1. Calculer les intégrales suivantes
 - (a) $\int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin(x^2) dx$ (à l'aide d'une primitive) ;
 - (b) $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$ (à l'aide d'un changement de variables) ;
 - (c) $\int_0^\pi x \sin(x) dx$ (à l'aide d'une intégration par parties) ;
 - (d) $\int_0^1 \frac{4}{x^2-4} dx$ (à l'aide d'une décomposition en éléments simples).
2. Déterminer une primitive des fonctions réelles suivantes :

$$(a) x \mapsto xe^x ; \quad (b) x \mapsto x \cos(x^2) ; \quad (c) x \mapsto \ln(1+x^2).$$

Exercice 3. (Limite d'une série). Soit $x \in [0; 1[$ fixé.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt.$$

2. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = 0.$$

3. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}$.

Exercice 4. (Suites d'intégrales).

1. Soient $a < b$. Soit une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ qui converge uniformément vers une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. En utilisant la linéarité et l'inégalité triangulaire pour de l'intégrale de Riemann, montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des intégrales $I_n = \int_a^b f_n(t) dt$ converge, et identifier sa limite.
2. Pour $n > 0$, on définit $f_n : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{\sin^2(nx)}{n} + x$.
 - (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\int_0^\pi f_n(x) dx$. (On pourra se rappeler que $\sin^2(\theta) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$ pour tout réel θ . Comment montre-t-on cette formule?).
 - (b) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction que l'on précisera.
 - (c) Est-il vrai que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi f_n(x) dx = \int_0^\pi \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx?$$

On pourra répondre à cette question de deux façons : à l'aide du calcul que l'on vient de mener, et en utilisant un résultat général d'interversion limite-intégrale.

3. On considère maintenant la suite de fonctions $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$g_n : x \mapsto (n+1)(n+2)x^n(1-x).$$
 - (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\int_0^1 g_n(x) dx$.
 - (b) Montrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction que l'on précisera.
 - (c) Est-il vrai que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 g_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) dx?$$

4. Soit $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $\frac{1}{n}$ sur $[0, n]$ et 0 en dehors.
 - (a) Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction identiquement nulle;
 - (b) Montrer que dans ce cas nous ne pouvons pas échanger limite et intégrale.

Exercice 5. (Une intégrale à paramètre). Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, \infty[$ une fonction continue. On considère la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$g(x) = \int_0^1 \sqrt{f(t) + x^2} dt.$$

1. Montrer que la racine carrée est sous-additive sur son domaine de définition : pour tous $a \geq 0$ et $b \geq 0$

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b},$$

et en déduire que pour tous $a \geq 0$ et $b \geq 0$

$$|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{|a-b|}.$$

2. Montrer que g est continue (sans utiliser de théorème sur la régularité des intégrales à paramètres).
3. Montrer que g tend vers $+\infty$ en $+\infty$ (sans utiliser de théorème de permutation limite intégrale).

Plus difficiles

Exercice 6. (Calcul d'une suite d'intégrales). Soit la suite de fonctions continues définie sur le segment $[0, \pi/2]$ par $f_n(t) = (\sin(t))^n$, pour $n \in \mathbb{N}$. On note

$$W_n = \int_0^{\pi/2} f_n(t) dt.$$

1. Calculer W_0 et W_1 .
2. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur l'intervalle $[0, \pi/2]$.
3. Soit $n \geq 2$. À l'aide d'une intégration par parties, exprimer W_n en fonction de W_{n-2} . En déduire une expression de W_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$ (on pourra distinguer les cas selon la parité de n).

Exercice 7. (Une limite d'intégrales). Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ par

$$f_n(x) = \frac{n(x^3 + x)e^{-x}}{nx + 1}.$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction f que l'on explicitera.
2. Soit $\alpha \in]0, 1[$. Montrer que l'on a convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sur l'intervalle $[\alpha, 1]$. Le résultat reste-t-il vrai pour $\alpha = 0$?
3. Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0, 1]$, la quantité $|f_n(x) - f(x)|$ est bornée indépendamment de n et de x .
4. En déduire que la suite d'intégrales $\left(\int_0^1 f_n(x) dx\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers une limite que l'on déterminera. On pourra choisir $0 < \alpha < 1$ suffisamment proche de 0, estimer séparément $\int_0^\alpha f_n(t) dt$ et utiliser la relation de Chasles et les questions précédentes.