

Feuille 2

Exercice 1. Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$, non réduit à $\{0\}$. On appelle

$$a = \inf\{G \cap \mathbb{R}_+^*\}.$$

1. On suppose $a \neq 0$. Montrer qu'alors $a \in G$, puis que $G = a\mathbb{Z}$. En déduire que G est fermé dans $\mathbb{R}$.
2. On suppose que $a = 0$. Montrer qu'alors G est dense dans $\mathbb{R}$.
3. Soient α et β deux réels non nuls, et

$$G = \{m\alpha + n\beta \mid (m, n) \in \mathbb{Z}^2\}.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur α et β pour que G soit fermé dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2 (Valeurs d'adhérences). .

1. Déduire de l'exercice précédent que l'ensemble

$$X = \{\cos n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

est dense dans $[-1, 1]$.

2. Soit (u_n) une suite réelle (ou plus généralement à valeurs dans un espace métrique). Montrer que l'ensemble V de ses valeurs d'adhérence est

$$V = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\{u_p \mid p \geq n\}}.$$

3. Déterminer alors l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite de terme général

$$u_n = \cos n.$$

Exercice 3. On désigne par $L^\infty([0, 1])$ l'espace des fonctions bornées de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Si $f \in L^\infty([0, 1])$, on pose

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|.$$

1. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $L^\infty([0, 1])$. On munit désormais $L^\infty([0, 1])$ de la topologie définie par cette norme.
2. Est-ce que le sous-espace $C([0, 1])$ des fonctions continues sur $[0, 1]$ est fermé dans $L^\infty([0, 1])$?

3. Est-il ouvert ?

Exercice 4. Soient (X, d) un espace métrique et $A \subset X$. Pour tout $x \in X$, on note

$$d(x, A) := \inf_{y \in A} d(x, y).$$

1. Montrer que la fonction $x \in X \mapsto d(x, A) \in \mathbb{R}$ est bien définie et 1-lipschitzienne.

2. Soit $x \in A$. Montrer que $d(x, A) = d(x, \overline{A})$, et que

$$d(x, A) = 0 \iff x \in \overline{A}.$$

3. Montrer que tout fermé de X est intersection dénombrable d'ouverts. Propriété duale.

4. Soient A et B deux fermés disjoints de X . Montrer qu'il existe deux ouverts disjoints U et V de X contenant respectivement A et B .

Exercice 5. Soient X un espace métrique et F un espace de Banach (par exemple $F = \mathbb{R}$). On munit l'espace vectoriel $C_b^0(X, F)$ des fonctions continues bornées définies sur X à valeurs dans F de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|.$$

Montrer que cet espace vectoriel normé est complet.

Exercice 6. 1. Soient E un espace métrique, $k > 0$ et $f_i : E \rightarrow \mathbb{R}$ ($i \in I$) une famille de fonctions k -lipschitziennes. On introduit

$$g = \inf_{i \in I} f_i.$$

Montrer que si g est finie en un point de E , elle est partout finie, et k -lipschitzienne.

2. Soient $A \subset E$ une partie d'un espace métrique et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction k -lipschitzienne. On définit pour $x \in E$ et $y \in A$,

$$f_y(x) = f(y) + k d(x, y),$$

puis

$$g = \inf_{y \in A} f_y.$$

Montrer que g est partout finie, k -lipschitzienne, et que $g|_A = f$.

Exercice 7. Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques, $A \subset X$ et $f : A \rightarrow Y$ continue (pour la distance induite).

1. Peut-on toujours prolonger f en une application continue $\tilde{f} : X \rightarrow Y$? Démonstration, ou contre-exemple.

2. Montrer que si A est dense dans X , si Y est complet, et si f est uniformément continue sur A , il existe une unique application continue $\tilde{f} : X \rightarrow Y$ qui prolonge f .

Exercice 8. Soient (X, d) un espace métrique compact et $f : X \rightarrow X$ une application continue telle que, pour tous points distincts $x, y \in X$,

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y).$$

1. Montrer par un exemple que l'hypothèse n'assure pas que f soit strictement contractante.
2. Montrer que f admet néanmoins un unique point fixe. On pourra introduire la fonction

$$x \in X \longmapsto d(f(x), x) \in \mathbb{R}.$$

Exercice 9. Soient E, F deux espaces vectoriels normés. Une application linéaire $u : E \rightarrow F$ est dite compacte si l'image $u(B)$ de la boule unité fermée de E est relativement compacte dans F .

1. Montrer qu'une application linéaire $u : E \rightarrow F$ compacte est continue.
2. Montrer que l'application linéaire $u : E \rightarrow F$ est compacte si et seulement si l'image $u(\beta)$ de la boule unité ouverte est relativement compacte.
3. Montrer que si $u : E \rightarrow F$ est linéaire continue et de rang fini (i.e. son image est de dimension finie), elle est compacte.
4. Exhiber une application $u : E \rightarrow F$ compacte (de rang 1 par exemple) pour laquelle l'image de la boule unité fermée n'est pas compacte.
5. À quelle condition l'application $\text{Id} : E \rightarrow E$ est-elle compacte ?