

Feuille 1**Exercice 1** (NORMES). Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on note

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad ; \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad ; \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

1. Vérifier que ces trois fonctions sont des normes.
2. Rappeler la démonstration de l'INÉGALITÉ DE CAUCHY-SCHWARZ : pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle x, y \rangle \leq \|x\|_2 \|y\|_2.$$

3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty \quad \& \quad \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty.$$

Exercice 2 (BORD ★). Pour une partie A de $\mathbb{R}^n$, on définit le *bord de A* (aussi appelé *frontière* de A) comme

$$\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}.$$

1. Montrer que $\mathbb{R}^n \setminus \mathring{A} = \overline{\mathbb{R}^n \setminus A}$. En déduire que ∂A est fermé.
2. Montrer que

$$\partial A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall \epsilon > 0, B(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset \quad \& \quad B(x, \epsilon) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset\}.$$

3. Montrer que le bord de A et celui de son complémentaire sont égaux.
4. Montrer que A est fermé si et seulement si $\partial A \subset A$.
5. Montrer que A est ouvert si et seulement si $\partial A \cap A = \emptyset$.

Exercice 3 (PARTIE DÉFINIE PAR DES INÉGALITÉS ★). Soient $h_1, \dots, h_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues. On considère l'ensemble

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h_i(x) \leq 0 \text{ pour tout } 1 \leq i \leq p\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{D}$ est fermé.
2. Montrer que l'ensemble

$$\mathcal{D}' = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h_i(x) < 0 \text{ pour tout } 1 \leq i \leq p\}$$

est ouvert.

3. Soit $x \in \partial\mathcal{D}$, montrer qu'il existe $1 \leq i \leq p$ vérifiant $h_i(x) = 0$.
4. Donner un exemple pour lequel $\mathcal{D}'$ n'est pas égal à l'intérieur de $\mathcal{D}$.

Exercice 4 (NORMES SUR LES ESPACES DE MATRICES). On fixe un entier $n \in \mathbb{N}$ et on définit sur $M_n(\mathbb{R})$ la quantité suivante :

$$N_1(M) = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Mx\|}{\|x\|}.$$

1. Montrer que N_1 est une norme sur $M_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\|Mx\| \leq N_1(M)\|x\|.$$

3. On définit maintenant une autre fonction

$$N_2(M) = \sqrt{\text{Tr}(M^t M)}.$$

Soit $\Phi : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$ l'application qui à une matrice associe le vecteur obtenu en écrivant ses colonnes les unes sous les autres. Montrer que $N_2(M) = \|\Phi(M)\|$ et en déduire que N_2 est une norme.

Exercice 5 (POUR SE FAIRE LA MAIN). Pour chacune des fonctions suivantes, donner son ensemble de définition et dire en justifiant en quels points elle est continue.

1. $f_1(x, y) = \ln(x + y)$;
2. $f_2(x, y) = \frac{1}{\cos(x + y)}$;
3. $f_3(x, y) = xyx^2 + y^2$;
4. $f_4(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$.

Exercice 6 (INVERSION DE MATRICES). Soit n un entier.

1. Montrer que l'application déterminant $\det : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.
2. En déduire que l'ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles est ouvert.
3. Montrer que l'application $A \mapsto A^{-1}$ est continue.
4. Est-ce un homéomorphisme ?